

ОДЕЉЕЊЕ ОБДАРЕНИХ УЧЕНИКА МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

10.03.2020.

1. Колико има седмоцифрених палиндрома чији је производ цифара паран?
2. Збир двоцифрених бројева  $\overline{ab}$  и  $\overline{cd}$  је дељив са 33. Докажи да је и четвороцифрени број  $\overline{abcd}$  дељив са 33.
3. 1) Доказати да је број  $n^3 + 2n$  дељив са 3 за све природне бројеве  $n$ .  
2) Доказати да ни за један природан број  $n$  број  $n^2 + 1$  није дељив са 3.  
3) Доказати да не постоје природни бројеви  $n$  и  $m$  такви да важи  $n^2 - 3m^2 = 14$ .
4. Одредити прост број  $p$  такав да је број  $8p^2 + 1$  такође прост.
5. Одредити све просте бројеве  $p$  такве да је и број: а)  $p^2 + 2019$ , б)  $p^3 + 2019$  прост.
6. Одредити све просте бројеве  $p$  и  $q$  такве да је  $p^2 - 2q^2 = 1$ .
7. Доказати да је број  $7^{2000} - 1$  дељив са 10.
8. Доказати да је број  $43^{3003} - 37^{1001}$  дељив са 10.
9. Са колико нула се завршава број  $9^{99} + 1$ ?
10. Постоји ли природан број  $n$  такав да је број  $n^2 + n + 1$  дељив са 5?
11. Доказати да следеће једначине немају решења у скупу целих бројева:
  - 1)  $x^2 - 5y = 10z + 3$ ;
  - 2)  $2x^2 + 5y = 1001$ ;
  - 3)  $2x^2 + 5y^2 = 111111$ ;
  - 4)  $3x^2 + 5y^2 = 4444$ ;
  - 5)  $x^4 + 2y^4 = 44444$ ;
  - 6)  $3^x + 6^y = 41^z$ ;  $(x, y, z \in \mathbb{N})$ .
12. Дати су разломци  $\frac{35}{99}$  и  $\frac{28}{121}$ . Наћи најмањи од свих позитивних рационалних бројева такав да кад се подели сваким од датих разломака количник буде природан број.
13. Наћи најмањи природан број који помножен са 450 даје а) квадрат, б) куб природног броја.
14. Нека су  $x$  и  $y$  природни бројеви и  $21xy^2$  и  $15xy$  квадрати природних бројева. Наћи најмању вредност збира  $x + y$ .
15. Збир двоцифреног броја  $\overline{ab}$  и броја  $\overline{ba}$  је потпун квадрат. Колико има оваквих бројева?
16. Производ шест узастопних природних бројева је седмоцифрени број  $216*16*$ . Одредити непознате цифре замењене звездицама.